

I. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 – dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0 :

A. Dérivabilité :

a. Définitions :

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

• f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \quad \ell = f'(x_0) \right)$ s'appelle

le nombre dérivé de f en x_0 .

• f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \quad \ell_d = f'_d(x_0) \right)$

s'appelle le nombre dérivé à droite de f en x_0 .

• f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \quad \ell_g = f'_g(x_0) \right)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 .

**** Exercices : 1,2 de la série**

b. Propriété :

Soit une fonction f .

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

B. interprétation géométrique des nombres dérivés $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

a. Interprétation géométrique du nombre dérivée $f'(x_0)$:

• f est une fonction dérivable au point x_0 .

• (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❖ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).

❖ Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ est
 $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

❖ Si $f'(x) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse.

b. Exemple :

1. Trouver équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point

$$x_0 = 1 \text{ avec } f(x) = 2x^2.$$

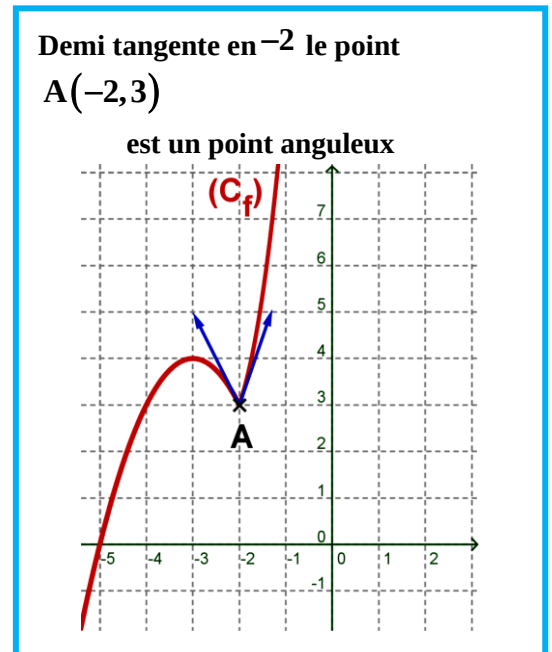
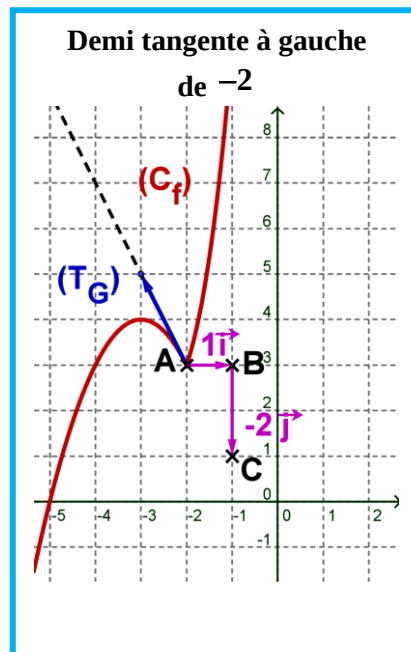
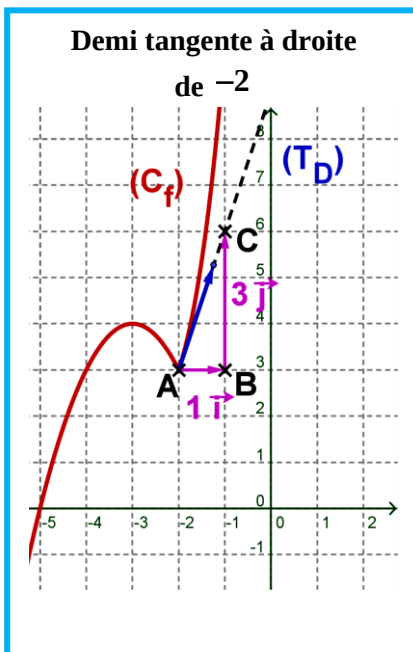
**** Exercices : 3,4 de la série**

c. Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$:

- ❖ Si f est dérivable à droite de x_0 on a une demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.
- ❖ équation du demi tangente à droite de $-x_0$ est $(T_d): y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.
- ❖ Si f est dérivable à gauche de x_0 on a une demi-tangente à gauche de x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.
- ❖ équation du demi tangente à gauche de $-x_0$ est $(T_g): y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.
- ❖ Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ donc f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux.

d. Exemple :

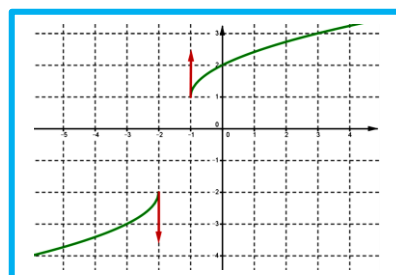
$$\text{soit } \begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases}$$



e. Remarque :

- si f n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées
- si f n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées .

f. Exemple : exemple $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$.



II. Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée première – dérivée seconde – dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction :

A. Dérivabilité sur un intervalle :

a. Définition :

- f est une fonction dérivable sur $I =]a; b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point x_0 de I .
- f est une fonction dérivable sur $[a; b[$ si et seulement si f est dérivable sur $I =]a; b[$ et f est dérivable à droite du point a .
- f est dérivable sur $]a, b]$ $\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à gauche de b .
- f est dérivable sur $[a, b]$ $\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b .

B. La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction:

a. Définition :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on

note : $g = f'$. Ou encore $\begin{matrix} g : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(x) = f'(x) \end{matrix}$ g s'appelle la fonction dérivée de f on note : $g = f'$.

- La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$.
- En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$) et on note $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

III. Les opérations sur les fonctions dérivables :

a. Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

IV. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $f^n(x)$ - fonctions trigonométriques :

a. Propriété :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1}$ et n
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .
- f est une fonction dérivable sur un intervalle I .
 - ✓ La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a : $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.
 - ✓ Si pour tout x de I ; $f(x) \neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$

** Exercice : 6 de la série

- La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$.
- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$.
- La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$ ou encore $f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b. Exemple : Calculer : $g'(x)$ pour $g(x) = (-2x^4 + 5x^2 + x - 3)^7$.

VII. Dérivabilité de la composée de deux fonctions :

a. Théorème :

f dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :
 $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

b. Application :

- $\left(\sqrt[n]{f(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)}} ; x \in D_f, \text{ et } f(x) > 0.$
- $(\sin(ax+b))'$
- $(\tan(ax+b))'$
- $(\cos(ax+b))'$

** Exercice : 7 de la série

V. La fonction dérivée de la fonction réciproque :

a. Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et $f(I) = J$, f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction $(x_0 \in I) ; x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 ; (y_0 \in J)$

f est dérivable en x_0
 $f(x_0) \neq 0$ } alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

ou encore $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

** Exercices : 8 , 9 de la série

b. Applications :

$n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$ et f est une fonction strictement positive et dérivable sur I	
$g'(x) = \left(\sqrt[n]{x} \right)' = \left(x^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}^*$	$\left(\sqrt[n]{f(x)} \right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
$g'(x) = \left(x^r \right)' = r x^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$	$\left([f(x)]^r \right)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$

c. Exemple :

1. Calculer la fonction dérivée f' de f .

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \text{ et } f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \text{ et } f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^7}$$

** Exercices : 11, 12 de la série

VI. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

** Exercices : 14,15,16 de la série

VI. Applications de la fonction dérivée première :

Remarque :

- dans le reste de ce chapitre f est une fonction numérique de la variable réelle x .
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée :

a. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I .

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I alors la fonction f est strictement croissante sur I .
(même si f' s'annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
(même si f' s'annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction f' est nulle sur I (sur I tout entier) alors f est constante.

b. Exemple :

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = (2x+4)^2$.

B. Extremums d'une fonction dérivable :

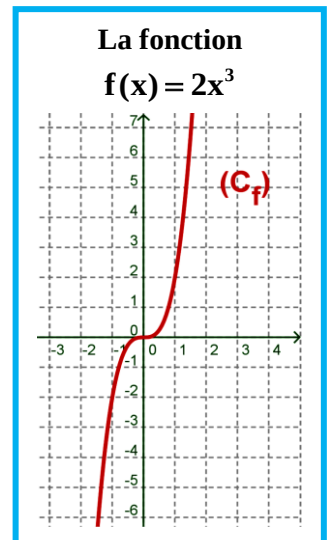
a. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : Si $f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

b. Exemple :

$f(x) = 2x^3$ on a $f'(x) = 6x^2$ d'où $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum de la fonction f .



c. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

VII. Applications de la fonction dérivée deuxième :

A. Position relative de la tangente et la courbe – la concavité :

a. Propriété et définition :

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives). on note

$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes des $x \in I$.

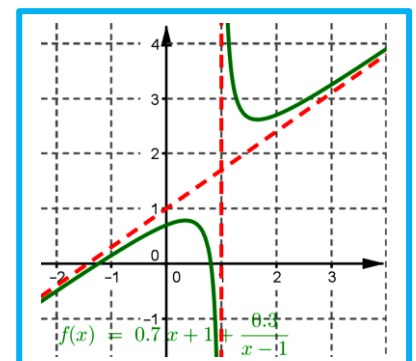
Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives). on note

b. Exemple :

Exemple 1 :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f .

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$: la courbe (C_f) de f est **convexe**.
(ou sa concavité est dans le sens des **ordonnées positives**).
- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$: la courbe (C_f) de f est **concave**.
(ou sa concavité est dans le sens des **ordonnées négatives**).



Exemple 2 :

Le tableau ci-contre représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	-	0	+
Concavité de (C_f)						

B. Points d'inflexions :

a. Propriété et définition :

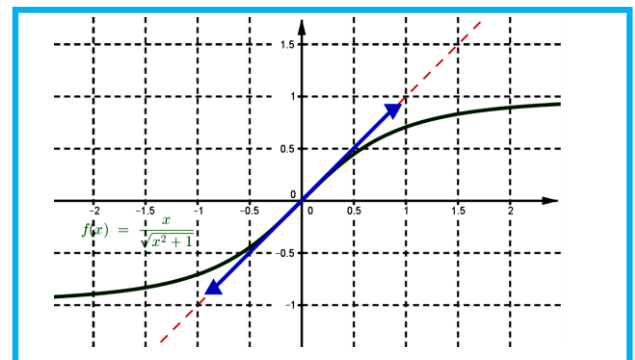
f est une fonction dérivable deux fois sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.

b. Exemple :

Exemple 1 :

- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exemple 2 :

Le tableau suivant représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	-	0	-
Concavité de (C_f)						

- Le point d'abscisse $x_0 = -5$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car $f''(-5) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de $x_0 = -5$.
- Le point d'abscisse $x_1 = 2$ n'est pas un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car f'' change de signe au voisinage de $x_1 = 2$.

VIII. Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

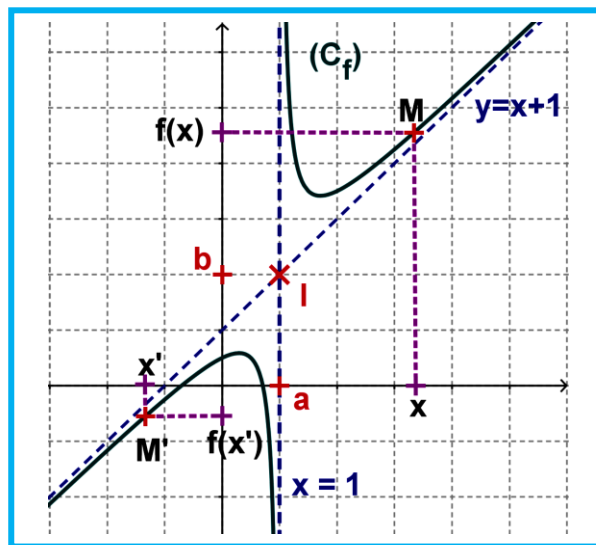
A. Centre de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie au courbe $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

b. Exemple :



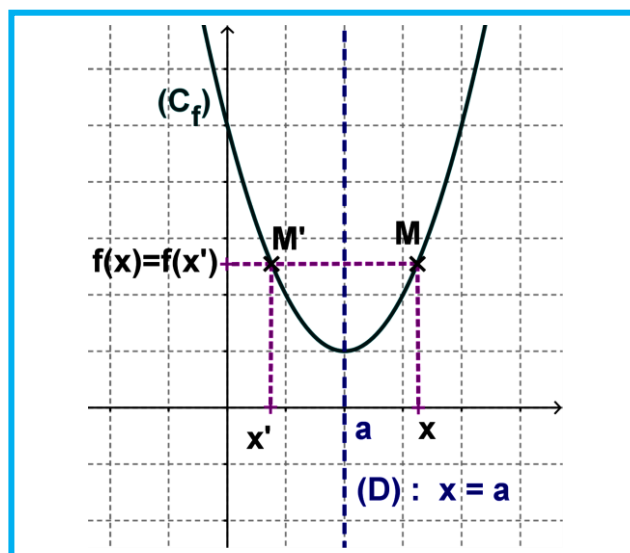
B. axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite d'équation $D: x = a$ est axe de symétrie au courbe $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

b. Exemple :



IX. Branches infinies d'une fonction :

A. Branches infinies :

a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de (C_f) tend vers l'infini on dit que la courbe (C_f) admet une branche infinie.

B. Asymptote verticale :

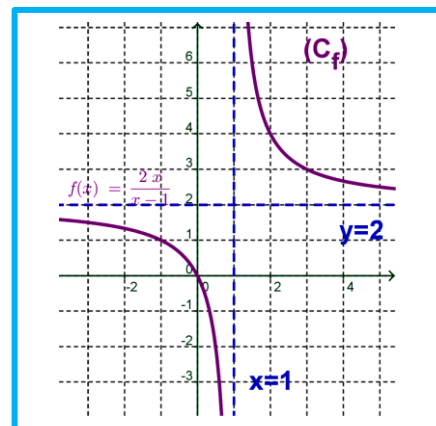
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (C_f) (à droite de a ou à gauche de a).

b. Exemple :

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$.



C. Asymptote horizontale

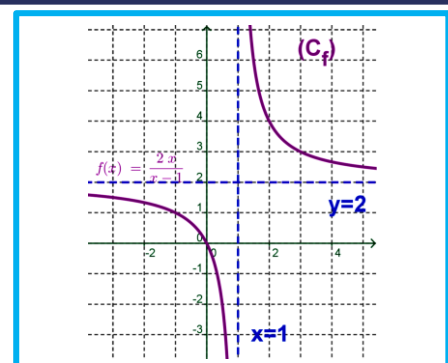
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $[a, +\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty, a[\subset D_f$) dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$) alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$) est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

b. Exemple :

Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$.



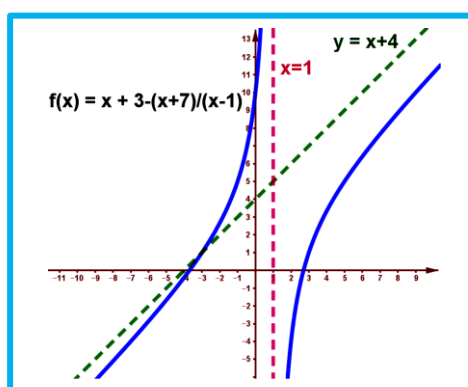
D. Asymptote oblique :

a. Définition :

- Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $([a, +\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty, a[\subset D_f)$ dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - $a \in \mathbb{R}^*$ ($a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$) et $b \in \mathbb{R}$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.

b. Exemple :

Soit $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$.



(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = x + 3$ **voisinage de $\pm\infty$**

c. Propriété :

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

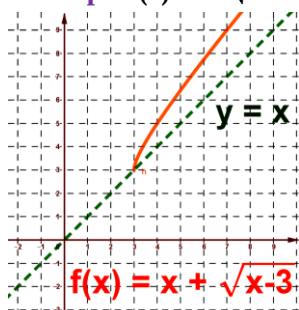
- Pour déterminer a on calcule : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ (c.à.d. $a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$) , donc on a deux cas particulières .
- Pour déterminer a on calcule : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (c.à.d. $b \neq \pm\infty$) . donc on a la troisième cas particulière .
- **Les cas particulières**
 - **1^{ère} cas particulière :** $a = \pm\infty$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des ordonnées .
 - **2^{ème} cas particulière :** $a = 0$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des abscisses .
 - **3^{ème} cas particulière :** $b = \pm\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) la droite d'équation $y = ax$.

les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

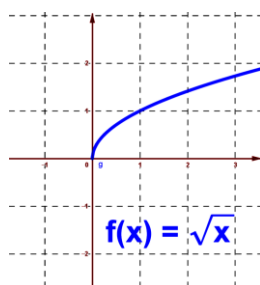
Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

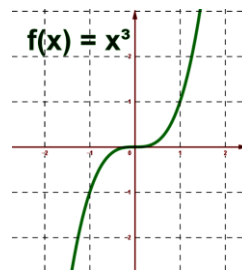
Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple $f(x) = x^3$



X. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .(complément)

a. Définition :

f est une fonction dérivable au point a

- La fonction u tel que : $u : x \rightarrow f(a) + (x-a)f'(a)$ (ou encore $(x-a=h)$; $v : h \rightarrow f(a) + hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .
- Quand x est très proche de a le nombre $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a) + hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ avec $x-a=h$.

C. Exemple :

❖ **Exemple 1 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x) = x^2$ et $a = 1$.

❖ **Exemple 2 :** Technique de calcul : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h+1$.

1. Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

1. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x) = x^2$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1+2h$.
- Pour la fonction : $f(x) = x^3$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^3 \approx 1+3h$.
- Pour la fonction : $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \approx 1-h$.

XI. Résumer des branches infinies :

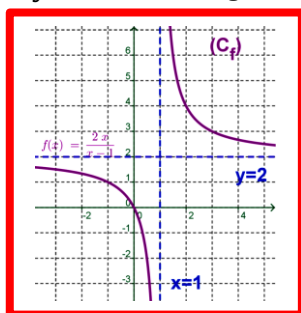
Les branches infinies

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$

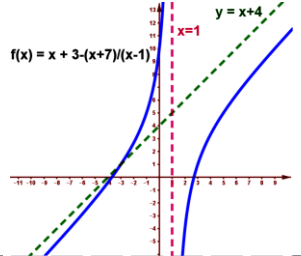


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$



Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

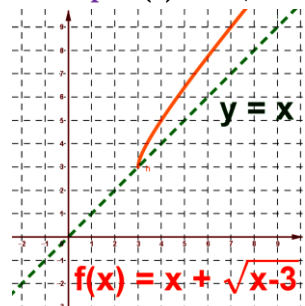
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$

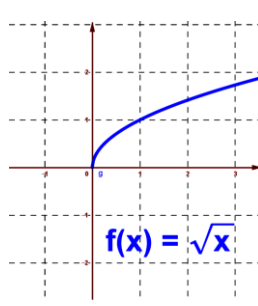


les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$

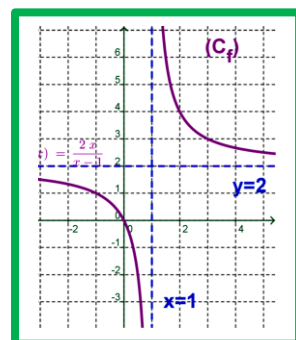


Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$

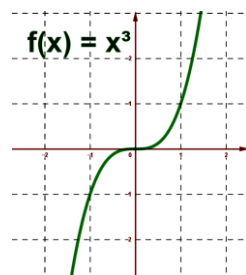


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple $f(x) = x^3$



Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x) = x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = -2$.

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et

donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation

géométrique

Exercice3 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Exercice4 : Calculer le nombre dérivé de

$f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Exercice5 : donner une approximation de $\sin 3$

Exercice6 : Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2) $f(x) = 4 \sin x$

3) $f(x) = x^4 \cos x$ 4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$

7) $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9) $f(x) = (2x+3)^5$

Exercice7 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$

2) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)$

3) $f(x) = \tan \cos(x)$

Exercice8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x$$

1)montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$

2)calculer : $(f^{-1})'(0)$

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + x^2$$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$

Exercice10 : Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Monter que g est une bijection de $]0, \pi/2[$ Vers $-1, 1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0, \pi/2]) (g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $] -1, 1[$.

Exercice 11 : Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$

2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1) : \sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2}$

$(E_2) : 2x\sqrt{x} - 3x^4\sqrt{\frac{1}{x}} = 20$

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

Exercice 14 : soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$
et donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
b) donner les équations des demi-tangentes à la courbe de f en $x_0 = -1$

Exercice 15 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition D_f de f
2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Exercice 16 : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$